לוגיקה (1) – פתרונות תרגיל (5)

1. ההוכחה היא באינדוקציה על מבנה הפסוק. עבור פסוק יסודי, הטענה ברורה. המקרה האחר שנותר הוא המקרה $\varphi = \psi_1 \circ \psi_2$ (לפי הנתון המקרה של שלילה אינו אפשרי). לפי הנחת האינדוקציה $A(\psi_i) = T$ עבור $i = 1,2$, ולכן לפי טבלאות האמת של הקשרים הדו-מקומיים גם $A(\varphi) = (\psi_1 \circ \psi_2) = T$.

2.

א. פונקציה n -מקומית $c : L^n \to L$ תקרא קשר פסוקי, אם קיימת פונקציה n-מקומית $t_c : \{T,F\}^n \to \{T,F\}$, כך שלכל מבנה A, ולכל $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in L$ מתקיים $A(c(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)) = t_c(A(\varphi_1),\ldots,A(\varphi_n))$.

ב. בה"כ אפשר להניח שכל הפסוקים היסודיים ב- φ הם מבין $(p_1,\ldots.p_n)$. נגדיר $t_f(x_1,\ldots,x_n) = A_x(\varphi)$ כאשר A_x הוא מבנה כלשהו לשפה המקיים $A_x(p_i) = x_i$. עתה, לפי המשפט הסמנטי של ההצבה $A(f(\varphi_1,\ldots.\varphi_n)) = A(Sub(\varphi, p_1,\ldots.p_n, \varphi_1,\ldots.\varphi_n)) = A'(\varphi)$

כאשר $A'(p_i) = A(\varphi_i)$, לכן $A'(\varphi) = A_x(\varphi) = t_f(A(\varphi_1),\ldots,A(\varphi_n))$ עבור $x = (A(\varphi_1),\ldots,A(\varphi_n))$, כנדרש.

ג.

i) מן המשפט הסמנטי של ההצבה נובע ש- $A \models sub(\varphi, \vec{P}, \vec{\phi})$ גורר ש- $B \models \varphi$ באשר B המבנה המקיים $val(B, \vec{P}) = val(A, \vec{\phi})$, מן הנתון $B \models \chi$, ושוב מן המשפט הסמנטי של ההצבה $A \models sub(\chi, \vec{P}, \vec{\phi})$, כנדרש.

ii) נשים לב ש- $A \models sub(\Gamma, \vec{P}, \vec{\phi})$ אמם לכל $\gamma \in \Gamma$ מתקיים $A \models sub(\gamma, \vec{P}, \vec{\phi})$, ומכאן אפשר לחזור על הוכחת סעיף *i)* מילה במילה.

iii) $\varphi \vee \neg\varphi$ מתקבל ע"י ההצבה $sub(p \vee \neg p, p, \varphi)$, ומכאן משתמשים בסעיף *i)* (כי ψ טאוטולוגיה אמם יש טאוטולוגיה χ כך ש- $\chi \models \psi$, בפרט נוכל לבחור $\chi = q \vee \neg q$).

iv) דומה לסעיף הקודם.

ד. נוכיח באינדוקציה על יצירת הפסוק שמספר הקשרים הפסוקיים בפסוק המתקבל אחרי הצבה אינו נופל ממספר הקשרים לפני ההצבה, וכי יש שוויון אמם ב- $\vec{\Phi} = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ פסוקים יסודיים בלבד. ראינו כבר שמספר הקשרים הפסוקיים בפסוק נתון ע"י הפונקציה

$$F(\psi) = \begin{cases} 0 & \psi \in S_0 \\ F(\psi_1) + 1 & \psi = \neg\psi_1 \\ F(\psi_1) + F(\psi_2) & \psi = \psi_1 \circ \psi_2 \end{cases}$$

לכן, עבור ψ פסוק יסודי הטענה נובעת (מהגדרת קל להוכיח באינדוקציה ש- $F(\psi) = 0$ אמם ψ פסוק יסודי). נראה עתה את צעד האינדוקציה: אם $\psi = \neg\varphi$ אז $Sub(\psi, \vec{P}, \vec{\Phi}) = \neg Sub(\varphi, \vec{P}, \vec{\Phi})$, לפי ה"ה הטענה נכונה עבור $Sub(\varphi, \vec{P}, \vec{\Phi})$, ומהגדרת הפונקציה F היא נובעת עבור $Sub(\psi, \vec{P}, \vec{\Phi})$. המקרה של קשר דו-מקומי מוכח באופן אנלוגי לחלוטין.

.3

א. יהיו h פולינום, ו-k מספר המשתנים ב-h. ראשית, נראה שהפונקציות הקבועות $f = n$ עם $n \in Z$ נוצרות: עבור $n = 1$ נקבל $f = 1(x_1, \ldots, x_k)$. עבור $n > 1$ כלשהו, אם $g = n - 1$ נוצרת אז $f = +(g(x_1, \ldots, x_k), 1(x_1, \ldots, x_k))$ נוצרת, וגמרנו. עבור $n = 0$ נקבל $f = -(1(x_1, \ldots, x_k), 1(x_1, \ldots, x_k))$ וגמרנו. עבור $n < 0$ כלשהו הטענה נובעת באופן דומה לזה שעבור $n > 0$ ע"י החלפת הפונקציה + בפונקציה -.

אם h מונום ו-$\deg(h) = 0$, גמרנו. לכן נניח ראשית, ש-h מונום ו-$\deg(h) > 0$ אזי עבור $\deg(h) = 1$ הטענה ברורה, כי אם $f = x_i$ אז $h = p_{k,i}(x_1, \ldots, x_k)$.

נניח עתה שהראינו את הטענה לכל מונום f עם $\deg(f) = n$ ונוכיח עבור $n+1$. נרשום ש-$h = ax_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}$ עם $n + 1 = \sum n_k$ ו-$a \in Z$. יהי $1 \le i \le k$ מזערי כך ש-$n_k \neq 0$, אזי $h = \cdot(ax_i, x_i^{n_i - 1} \ldots x_k^{n_k})$ ומכיוון שמה"ה $g = x_i^{n_i - 1} \ldots x_k^{n_k}$ ו-$ax_i = \cdot(a, x_i)$ (וממה שגבר הראינו הפונקציות $a(x_1, \ldots, x_k)$ ו-$f = x_i$) נוצרת נובע ש-h נוצרת. לבסוף, בדיוק באותו אופן מראים באינדוקציה על מספר המונומים ב-h ש-h נוצרת מן המונומים ומן הפונקציה + (עוגן האינדוקציה הוא כמובן, מה שהוכחנו עד כאן).

לבסוף, נותר לוודא שכל פונקציה נוצרת היא פולינום: ההוכחה באינדוקציה על היצירה. עבור פונקצית ההיטל אין מה להוכיח. מכאן הטענה נובעת מכך שסכום חיסור וכפל של פולינומים הוא פולינום.

ב. אותה הוכחה בדיוק כמו בסעיף א' תראה שהפונקציות הנוצרות מ-$1, \cdot, +$ הן הפולינומים במקדמים שלמים (השוני היחיד הוא שהפונקציות הקבועות האי-חיוביות אינן נוצרות, ולכן כל המקדמים במונומים הם טבעיים).

ג. שוב, באופן דומה, מראים שהפונקציות הנוצרות רק מ-$+$ הן הפונקציות הלינאריות ההומוגניות (כלומר, ללא איבר חפשי).